Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 5, pp. 153–162. Pergamon Press 1962. Printed in Great Britain.

AUSTAUSCHFLÄCHEN BEI DREISTOFF-WÄRMEAUSTAUSCHERN*

GÜNTER LÜCK
Badische Anilin- und Soda-Fabrik A. G., Ludwigshafen a. Rh.

(*Received* 10 *June* 1961)

Zusammenfassung—Für Dreistoff-Wärmeaustauscher, worunter solche zu verstehen sind, bei welchen ein heisser Stoff gleichzeitig zwei Medien erwärmt, wird eine Möglichkeit gegeben, die von einander abhängigen Austauschflächen zu berechnen. Das geschieht durch Separation der für die sechs Arten aufgestellten Diffgln. unter Bildung eines Temperaturverhältnisfaktors, der näherungsweise gradlinigen Temperaturverlauf annimmt. Die gefundenen Gleichungen haben dann die gleiche Form wie die für Zweistoff-Wärmeaustauscher mit einem zusätzlichen Summenglied, welches die Abhängigkeit der Medien voneinander berücksichtigt.

EINLEITUNG

IN DER Verfahrenstechnik benötigt man manchmal Apparate für den Wärmeaustausch zwischen drei Stoffen. Es sollen hier derartige Wärmeaustauscher—Dreistoffwärmeaustauscher—unter dem Gesichtspunkt betrachtet werden, dass dabei ein Medium der wärmeabgebende Stoff und die beiden anderen Medien die wärmeaufnehmenden Stoffe sind. Derartige Fälle können unter den verschiedensten Gesichtspunkten und in mannigfacher Form in der Praxis auftreten. Betrachtet man die Verwendungsgrundlagen dieser Apparate, so sind drei Arten von Dreistoff-Wärmeaustauschern zu unterscheiden. Der erste Fall ergibt sich aus erforderlichen wirtschaftlichen Gründen. Er wird dargestellt, wenn wirtschaftlich auszunutzende Energie zwei Stoffe gleichzeitig zu erwärmen hat. Beispielsweise kann diese Art bei Austauschern für die heissen Gase eines Dampfkessels auftreten, wo gleichzeitig die vorzuwärmende Verbrennungsluft und das Kesselspeisewasser erwärmt werden können, oder es kann beispielsweise Koksofengas zur Erwärmung von Methan und Wasserstoff dienen. Der zweite Fall wird infolge der Notwendigkeit dargestellt, bei einem Wärmeaustausch zwischen zwei Medien eine eventuell mögliche Berührung beider Stoffe auf jeden Fall zu vermeiden. Diese Anwendungsmöglichkeit besteht z.B. in der chemischen Industrie dann, wenn zwei wärmeaustauschende Gase oder Flüssigkeiten auf keinen Fall infolge falscher Reaktionen oder Explosionsgefahr in Berührung kommen dürfen. Zum Zwecke der erforderlichen Sicherheit für den Betrieb erfolgt in diesem Falle der Wärmeaustausch über ein für beide Medien neutrales Gas oder einen neutralen Stoff. Die Charakteristik der dritten Art von Dreistoffwärmeaustauschern ist es, bei Zweistoff-Wärmeaustauschern den Wärmeverlust in die Berechnung einzubeziehen, was infolge Annahme absoluter Isolation nicht geschieht. So ist theoretisch jeder Zweistoff-Wärmeaustauscher ein solcher Apparat; denn es wird auch trotz guter Isolation ein Wärmeverlust an die Umgebung auftreten, weil sowohl praktisch als auch wirtschaftlich keine vollkommene Isolation zu erstellen ist. Sie kann sogar aus betrieblichen Gründen wegfallen.

Fasst man nun alle Möglichkeiten für die Strömungsrichtungen der Austauschmedien von Dreistoffwärmeaustauschern zusammen, so ergeben sich 6 verschiedene Arten von Austauschern, welche in den Abb. 1 bis 6 dargestellt sind. Die Bezeichnungen der Austauscherarten erfolgen wie bei den Zweistoff-Wärmeaustauschern nach dem Strömungsverhalten der Stoffe zueinander.

* Vortrag, gehalten bei der Arbeitssitzung des VDI-Fachausschusses "Wärmeaustauscher und Verdampfer" am 21./22. 10. 57 in Göttingen.

Die Benennung der Typenart geschieht dabei so, dass die Strömungsrichtung des heisseren wärmeaufnehmenden Mediums zuerst erfolgt, was aus Abb. 1 bis 6 zu ersehen ist.

Im Allgemeinen geht man bei der Berechnung von Dreistoff-Wärmeaustauschern der Einfachheit halber und infolge des Fehlens von Einheitsgleichungen wie bei den Zweistoff-Wärmeaustauschern so vor, dass man den Wärmeaustausch der wärmeaufnehmenden Medien trennt und jeden Austausch für sich berechnet. Das kann man besonders dann mit guter Annäherung an die richtigen Ergebnisse tun, wenn die Temperaturänderungen annähernd gleich sind. Weichen dagegen die Temperaturen, die Strömungsrichtungen und die Stoffwerte der einzelnen Medien erheblich voneinander ab, so muss man Dreistoff-Wärmeaustauscher infolge ihrer Besonderheit gesondert berechnen. Der Weg zur Erlangung der genauen Berechnungsunterlagen ist theoretisch vollkommen klar. Er ist in einer Arbeit von Morley [1] gegeben, wobei für den Temperaturverlauf der Medien drei simultane Diffgln. aufgestellt und gelöst werden. Denselben Lösungsweg bringt auch Hausen [2] in etwas einfacherer übersichtlicher Form. Ferner hat Nesselmann [3] schon vor den andern beiden Autoren die beiden Grenzfälle der Dreistoff-Wärmeaustauscher, welche hier in Abb. 1 und 6 dargestellt sind, behandelt und sie in Bezug auf den Temperaturverlauf und die sich daraus ergebenden Fragen gelöst. Hierbei ist jedoch zu bedenken, dass für die exakte Lösung aller 6 Dreistoff-Wärmeaustauscher-Typen bei der Lösung jeweils 6 Integrationskonstanten auftreten. Diese sind zwar eindeutig zu bestimmen, ergeben aber einmal umständliche Rechenarbeit. Ferner ist ja die praktisch meist verlangte Grösse die Austauschfläche. Gerade diese aber lässt sich bei dem theoretisch exakten Verfahren aus einer sehr komplizierten transzendenten Gleichung und meist nur durch Probieren lösen. Daher sind die gefundenen Gleichungen in der Praxis unbrauchbar für Berechnungen von Austauschflächen. Bei der Behebung dieser Schwierigkeiten soll daher folgender Weg beschritten werden. Als Ausgangspunkt dienen dieselben Diffgln. wie bei der theoretisch exakten Lösung, nur werden diese vor der Integration separiert. Dies ist jedoch nur möglich, wenn man das Differentialverhältnis der Wärmeelemente, das bei der Separation auftritt, mit einem geradlinigen Temperaturverlauf lösbar macht. Das wird im Folgenden gezeigt und damit ist es möglich, die Austauschflächen einzeln zu berechnen.

PROBLEMSTELLUNG UND LÖSUNGEN

Für die zu behandelnden Dreistoff-Wärmeaustauscher, deren Flächenänderung in der Länge mit der Koordinate x bezeichnet wird, gibt der wärmeabgebende Stoff mit der Temperatur ϑ auf dem Längenelement dx die Wärmemenge dQ ab an die Stoffe mit den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2.

Mit abnehmender Temperatur ist dabei

$$dQ = -W \, . \, d\vartheta \tag{1}$$

Bei dieser Wärmeabgabe werden die wärmeaufnehmenden Stoffe mit den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 je nach Austauscherart im Sinne zunehmender Koordinate x erwärmt oder abgekühlt, sodass gilt

$$dQ = \pm W_1 \, . \, d\vartheta_1 \pm W_2 \, . \, d\vartheta_2 \tag{2}$$

Dabei kann auch in den Grenzfällen der zu betrachtenden Probleme—Abb. 1 und 6—für die Temperatur ϑ_2 die Änderung d$\vartheta_2 = 0$ sein, sodass die Gl. (2) alle 6 Führungsmöglichkeiten der Dreistoff-Wärmeaustauscher enthält. Ferner erfolgt von dem wärmeabgebenden Stoff nach der Pecletschen Gleichung eine Wärmeabgabe

$$dQ = k_1 \, . \, U_1 \, . \, dx(\vartheta - \vartheta_1) + k_2 \, . \, U_2 \, . \, dx(\vartheta - \vartheta_2) \tag{3}$$

wobei U der Umfang bzw. die Tiefe der Austauschfläche ist und über die Länge konstant sei.

Mit diesen 3 Gleichungen ist es nun möglich, alle 6 in Abb. 1 bis 6 dargestellten Dreistoff-Wärmeaustauscherarten zu berechnen.
Wie man ersieht, gilt dabei

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 \tag{4}$$

Die Temperaturbezeichnungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten sind einheitlich in

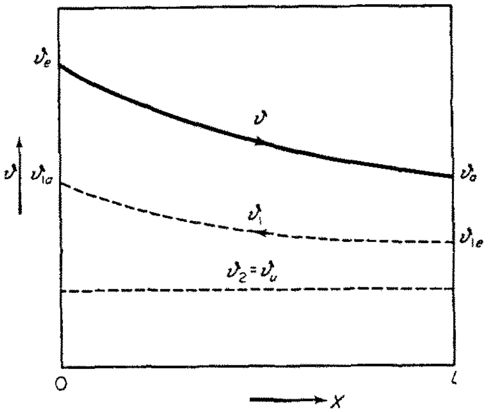

Abb. 1. Gegenstrom.

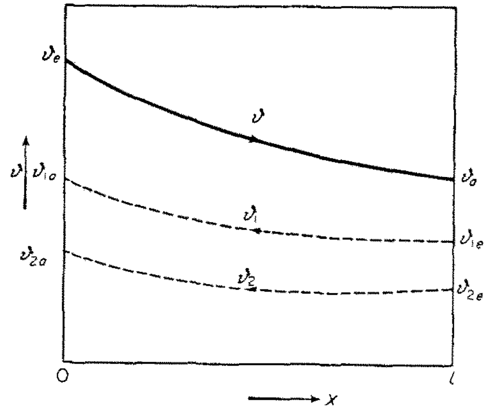

Abb. 2. Gegen-Gegenstrom.

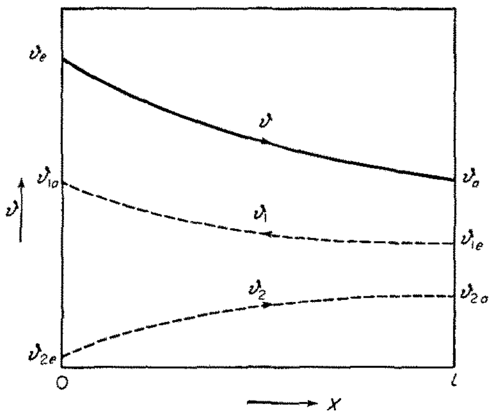

Abb. 3. Gegen-Gleichstrom.

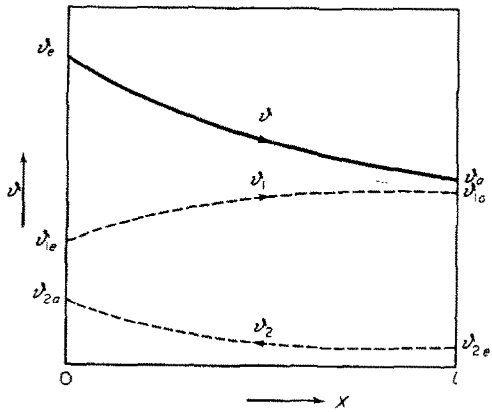

Abb. 4. Gleich-Gegenstrom.

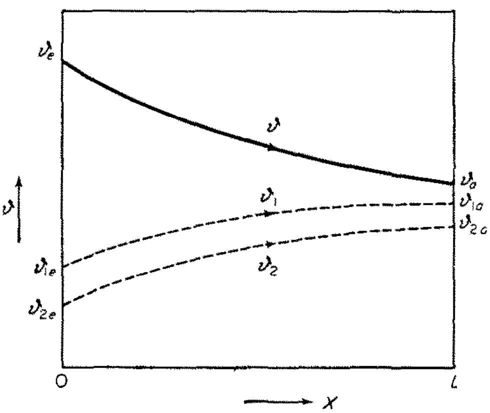

Abb. 5. Gleich-Gleichstrom.

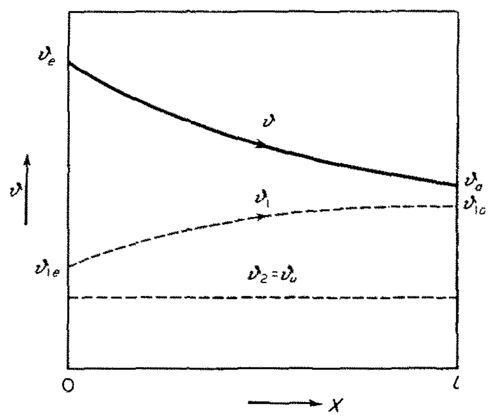

Abb. 6. Gleichstrom.

Abb. 1 bis 6 für die Grenzen $x = 0$ und $x = l$ angegeben.

Wie schon oben erwähnt, soll zur praktischen Brauchbarkeit der zu findenden Gleichungen für Dreistoff-Wärmeaustauscher nach Gl. (4) der Weg der Separation vor der Integration beschritten werden. Das ist bei den Gln. (2) und (3) ohne weiteres möglich, führt jedoch für die Gl. (1) zur Anwendung einer Näherung. Um auch Gl. (1) trennen zu können, wird gesetzt

$$\mathrm{d}Q = -W\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}Q}\,.\,\mathrm{d}\vartheta - W\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}Q}\,.\,\mathrm{d}\vartheta \tag{1a}$$

Daraus entsteht mit Gl. (3)

$$\mathrm{d}Q = -W\mathrm{d}\vartheta\,\frac{1}{1+\dfrac{k_2\,.\,U_2\,.\,(\vartheta-\vartheta_2)}{k_2\,.\,U_1\,.\,(\vartheta-\vartheta_1)}} - W\mathrm{d}\vartheta\,\frac{1}{1+\dfrac{k_1\,.\,U_1(\vartheta-\vartheta_1)}{k_2\,.\,U_2(\vartheta-\vartheta_2)}} \tag{1b}$$

Da Gl. (1b) keine vollkommene Separation der Gl. (1) ergibt—infolge gemeinsamen Auftretens von ϑ_1 und ϑ_2 in beiden Summanden—werden als Funktonen von x gesetzt

$$\varphi(x)_1 = \frac{\vartheta-\vartheta_1}{\vartheta-\vartheta_2} \text{ und } \varphi(x)_2 = \frac{\vartheta-\vartheta_2}{\vartheta-\vartheta_1} \tag{5}$$

Die Temperaturerdifferenzen werden als gradlinig von x abhängig angenommen. Dann ist

$$\varphi(x)_{m,n} = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{6}$$

wobei der Index m die Type des Dreistoff-Wärmeaustauschers angibt und n die beiden Arten der Funktionen nach Gl. (5). Die Konstanten a, b, c, d stellen dabei Temperaturdifferenzen dar, die für alle 6 Typen der Dreistoff-Wärmeaustauscher verschieden sind und in Tabelle 1 abgelesen werden können. Für die zur Lösung der einzelnen Typen erforderliche Integratin ergibt sich

$$\psi(x)_{m,n} = \int_0^x \varphi(x)_{m,n}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{ax+b}{cx+d}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{c}\left[x + \left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)\ln\frac{cx+d}{d}\right] \tag{7}$$

Tabelle 1

m →		I	II	III
↓ n		Gegenstrom	Gegen-Gegenstrom	Gegen-Gleichstrom
1	a	$(\vartheta_a - \vartheta_e).1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{2e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{2a})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{2a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{2e})].1/l$
	b	$\vartheta_e - \vartheta_2$	$\vartheta_e - \vartheta_{2a}$	$\vartheta_e - \vartheta_{2e}$
	c	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1a})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1a})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1a})].1/l$
	d	$\vartheta_e - \vartheta_{1a}$	$\vartheta_e - \vartheta_{1a}$	$\vartheta_e - \vartheta_{1a}$
2	a	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1a})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1a})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1a})].1/l$
	b	$\vartheta_e - \vartheta_{1a}$	$\vartheta_e - \vartheta_{1a}$	$\vartheta_e - \vartheta_{1a}$
	c	$(\vartheta_a - \vartheta_e).1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{2e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{2a})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{2a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{2e})].1/l$
	d	$\vartheta_e - \vartheta_2$	$\vartheta_e - \vartheta_{2a}$	$\vartheta_e - \vartheta_{2e}$

Temperaturverhältnis $\psi_{m,\,n} = \dfrac{a}{c}\left[1 + \left(\dfrac{b}{a.l} - \dfrac{d}{c.l}\right)\ln\dfrac{c.l+d}{d}\right]$

Daraus wird die später gebrauchte Funktion für die Berechnung der Austauschfläche

$$\psi_{m,n} = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{ax+b}{cx+d}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a}{c}\left[1 + \left(\frac{b}{a.l} - \frac{d}{c.l}\right)\ln\frac{c.l+d}{d}\right] \tag{7a}$$

Mit diesen Grundlagen kann auf die Lösung der einzelnen Gleichungen für die Dreistoff-Wärmeaustauschertypen eingegangen werden.

(a) *Gegenstrom-Wärmeaustauscher*

Der Dreistoff-Wärmeaustauscher mit dem Temperaturverlauf nach Abb. 1 stellt einen gewöhnlichen Zweistoff-Wärmeaustauscher im Gegenstromprinzip mit Berücksichtigung des Wämeverlustes an die Umgebung dar. Neben den verlangten Grössen wie Temperaturverlauf, ausgetauschter Wärme, Verlustwärme bzw. Verlustfaktor Ω (Prozent) ist für die Ausführung von Wärmeaustauschern die Austauschfläche das Wichtigste.

Der Temperaturverlauf und die ausgetauschte Wärme Q_1 folgen aus den Diffgln.

$$\mathrm{d}Q_1 = -W\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}Q}\,.\,\mathrm{d}\vartheta \tag{8}$$

$$\mathrm{d}Q_1 = -W_1\,.\,\mathrm{d}\vartheta_1 \tag{9}$$

$$\mathrm{d}Q_1 = k_1\,.\,U_1\,.\,\mathrm{d}x(\vartheta - \vartheta_1) \tag{10}$$

wofür die Randbedingungen für $x = 0$ und $x = l$ in Abb. 1 enthalten sind.

Daraus ergibt sich der Temperaturverlauf mit bekannten Anfangs- und Endtemperaturen der Stoffe zu

$$\ln\frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_e - \vartheta_{1a}} = k_1\,.\,U_1\,.\,x\left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W}\right) - \frac{k_2\,.\,U_2}{W}\,.\,\psi(x)_{\mathrm{I},1} \tag{11}$$

oder

$$\vartheta - \vartheta_1 = (\vartheta_e - \vartheta_{1a}) \times \exp\left[k_1\,.\,U_1\,.\,x\left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W}\right) - \frac{k_2\,.\,U_2}{W}\,.\,\psi(x)_{\mathrm{I},1}\right] \tag{11a}$$

Die Indices für $\psi(x)$ und ψ folgen aus Tabelle 1. Die Gleichung für die ausgetauschte Wärme Q_1 lautet

Tabelle 1 (continued)

IV	V	VI		m ←
Gleich-Gegenstrom	Gleich-Gleichstrom	Gleichstrom		↓ n
$[(\vartheta_a - \vartheta_{2e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{2a})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{2a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{2e})].1/l$	$(\vartheta_a - \vartheta_e).1/l$	a	1
$\vartheta_e - \vartheta_{2a}$	$\vartheta_e - \vartheta_{2e}$	$\vartheta_e - \vartheta_2$	b	
$[(\vartheta_a - \vartheta_{1a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1e})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1e})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1e})].1/l$	c	
$\vartheta_e - \vartheta_{1e}$	$\vartheta_e - \vartheta_{1e}$	$\vartheta_e - \vartheta_{1e}$	d	
$[(\vartheta_a - \vartheta_{1a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1e})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1e})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{1a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{1e})].1/l$	a	2
$\vartheta_e - \vartheta_{1e}$	$\vartheta_e - \vartheta_{1e}$	$\vartheta_e - \vartheta_{1e}$	b	
$[(\vartheta_a - \vartheta_{2e}) - (\vartheta_e - \vartheta_{2a})].1/l$	$[(\vartheta_a - \vartheta_{2a}) - (\vartheta_e - \vartheta_{2e})].1/l$	$(\vartheta_a - \vartheta_e).1/l$	c	
$\vartheta_e - \vartheta_{2a}$	$\vartheta_e - \vartheta_{2e}$	$\vartheta_e - \vartheta_2$	d	

$$Q_1 = \frac{k_1 . F_1(\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e})}{-\ln \frac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}} + \frac{k_1 . F_1}{W} + \frac{k_2 . F_2}{W} . \psi_{\mathrm{I},1}} \tag{12}$$

Ist wie gewöhnlich gerechnet, die Wärmedurchgangszahl $k_2 = 0$ und damit $Q_1 = Q$, so wird daraus die für Gegenstrom-Rekuperatoren bekannte Gleichung

$$Q_{\mathrm{Geg}} = \frac{k_1 . F_1 [(\vartheta_e - \vartheta_{1a}) - (\vartheta_a - \vartheta_{1e})]}{\ln \frac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}}} = k_1 . F_1 . \Delta\vartheta_m \tag{13}$$

Die erforderliche Austauschfläche F_1 ist nach Gleichung (12) infolge des Wärmeverlustes Q_2 an die Umgebung auch noch von der Austauschfläche F_2, also der Isolation abhängig. Der Wärmeverlust Q_2 wird mit $\vartheta_2 = \text{const.}$

$$\mathrm{d}Q_2 = - W \frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}Q} . \mathrm{d}\vartheta \tag{14}$$

und

$$\mathrm{d}Q_2 = k_2 . U_2 . \mathrm{d}x(\vartheta - \vartheta_2) \tag{15}$$

zu

$$Q_2 = \frac{k_2 . F_2(\vartheta_e - \vartheta_a)}{\frac{k_2 . F_2}{W} + \frac{k_1 . F_1}{W} . \psi_{\mathrm{I},2}} \tag{16}$$

Schreibt man diese Gleichung (16) mit dem Verlustfaktor Ω, so lautet sie

$$Q_2 = \Omega . W . (\vartheta_e - \vartheta_a) = \Omega . Q \tag{17}$$

wobei die Gleichung für den Verlustfaktor lautet

$$\Omega = \frac{1}{1 + \frac{k_1 . F_1}{k_2 . F_2} . \psi_{\mathrm{I},2}} \tag{18}$$

Die wichtigste Frage bei Austauschern ist die nach den Austauchflächen. Wegen der technisch wichtigsten Frage bei der Berechnung von Wärmeaustauschern war bei der Separation die für die einzelne Berechnung der Austauschflächen erforderliche Näherung gemacht worden.

Aus den Gln. (12) und (16) erhält man für den verlustbehafteten Gegenstrom-Wärmeaustauscher, einen Dreistoff-Wärmeaustauscher die Gleichungen

$$F_1 = \frac{\ln \frac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}}}{k_1 \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W}\right) \left[\frac{\psi_{\mathrm{I},1} . \psi_{\mathrm{I},2}}{\left(\frac{W}{W_1} - 1\right)\left(\frac{Q}{Q_2} - 1\right)} - 1\right]} \tag{19}$$

und für die Isolierfläche

$$F_2 = F_1 . \frac{k_1}{k_2} . \frac{\psi_{\mathrm{I},2}}{\left(\frac{Q}{Q_2} - 1\right)} \tag{20}$$

(b) *Gegen-Gegenstrom-Wärmeaustauscher*

Bei diesem wohl am meisten angewandten Dreistoff-Wärmeaustauscher-Prinzip nach Abb. 2 gibt ein Stoff mit der Temperatur ϑ Wärme an zwei Medien ab, die im Austauscher beide im Gegenstrom zum wärmeabgebenden Stoff gerichtet sind.

Die zu trennenden Diffgln. für den Temperaturverlauf lauten dann nach Gln. (1b), (2) und (5)

$$\mathrm{d}Q = - \left[\frac{W . \mathrm{d}\vartheta}{1 + \frac{k_2 . U_2}{k_1 . U_1} \varphi(x)_2} + \frac{W . \mathrm{d}\vartheta}{1 + \frac{k_1 . U_1}{k_2 . U_2} \varphi(x)_1}\right] \tag{21}$$

$$\mathrm{d}Q = - W_1 . \mathrm{d}\vartheta_1 - W_2 . \mathrm{d}\vartheta_2 \tag{22}$$

Diese Diffgln. mit Gl. (3) und den aus Abb. 2 ersichtlichen Randwerten ergeben die Temperaturverläufe zwischen den gegebenen Temperaturen zu

$$\frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_e - \vartheta_{1a}} = \exp\left[k_1 . U_1 . x \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W}\right) - \frac{k_2 . U_2}{W} \psi(x)_{\mathrm{II},1}\right] \tag{23}$$

und

$$\frac{\vartheta - \vartheta_2}{\vartheta_e - \vartheta_{2a}} = \exp\left[k_2 . U_2 . x \left(\frac{1}{W_2} - \frac{1}{W}\right) - \frac{k_1 . U_1}{W} \psi(x)_{\mathrm{II},2}\right] \tag{24}$$

Die an die wärmeaufnehmenden Stoffe abgegebenen Wärmemengen errechnen sich zu

$$Q_1 = \frac{k_2 \, . \, F_1 (\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e})}{-\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}} + \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} + \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{II},\,1}} \tag{25}$$

$$Q_2 = \frac{k_1 \, . \, F_2 (\vartheta_{2a} - \vartheta_{2e})}{-\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2a}}{\vartheta_a - \vartheta_{2e}} + \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} + \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{II},\,2}} \tag{26}$$

Für die Ermittlung der Austauschflächen werden daraus die Gleichungen

$$F_1 = \frac{-\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}} + \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{II},\,1}}{k_1 \left(\dfrac{1}{W_1} - \dfrac{1}{W} \right)} \tag{27}$$

und

$$F_2 = \frac{-\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2a}}{\vartheta_a - \vartheta_{2e}} + \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{II},\,2}}{k_2 \left(\dfrac{1}{W_2} - \dfrac{1}{W} \right)} \tag{28}$$

Daraus ergeben sich ohne Mitführung der anderen Flächengrösse, die in den Gln. (27) und (28) enthalten sind, die Gleichungen nur als Stoffwert- und Temperaturfunktionen

$$F_1 = \frac{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}} + \dfrac{\psi_{\mathrm{II},\,1}}{W \left(\dfrac{1}{W_2} - \dfrac{1}{W} \right)} \, . \, \ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2a}}{\vartheta_a - \vartheta_{2e}}}{k_1 \left[\dfrac{1}{W} - \dfrac{1}{W_1} + \dfrac{\psi_{\mathrm{II},\,1} \, . \, \psi_{\mathrm{II},\,2}}{W^2 \left(\dfrac{1}{W_2} - \dfrac{1}{W} \right)} \right]} \tag{29}$$

$$F_2 = \frac{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2a}}{\vartheta_a - \vartheta_{2e}} + \dfrac{\psi_{\mathrm{II},\,2}}{W \left(\dfrac{1}{W_1} - \dfrac{1}{W} \right)} \, . \, \ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}}}{k_2 \left[\dfrac{1}{W} - \dfrac{1}{W_2} + \dfrac{\psi_{\mathrm{II},\,1} \, . \, \psi_{\mathrm{II},\,2}}{W^2 \left(\dfrac{1}{W_1} - \dfrac{1}{W} \right)} \right]} \tag{30}$$

(c) *Gegen-Gleichstrom-Wärmeaustauscher*

Beim Gegen-Gleichstrom befindet sich der heissere wärmeaufnehmende Stoff zum wärmeabgebenden im Gegenstrom, während der kühlere im Gleichstrom verläuft.

Die Diffgln. für die Bestimmung des Temperaturverlaufs sind

$$\mathrm{d}Q = -\, W \mathrm{d}\vartheta \left[\frac{1}{1 + \dfrac{k_2 \, . \, U_2}{k_1 \, . \, U_1} \varphi(x)_2} + \frac{1}{1 + \dfrac{k_1 \, . \, U_1}{k_2 \, . \, U_2} \varphi_{(x)_2}} \right] \tag{21}$$

$$\mathrm{d}Q = -\, W_1 \, . \, \mathrm{d}\vartheta_1 + W_2 \, . \, \mathrm{d}\vartheta_2 \tag{31}$$

sowie die Gl. (3).

Diese zu trennenden Diffgln. ergeben für die Temperaturverläufe zwischen den Temperaturen ϑ, ϑ_1 und ϑ_2

$$\frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_e - \vartheta_{1a}} = \exp \left[k_1 \, . \, U_1 \, . \, x \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W} \right) - \frac{k_2 \, . \, U_2}{W} \, . \, \psi_{(x)\mathrm{III},\,1} \right] \tag{32}$$

$$\frac{\vartheta - \vartheta_2}{\vartheta_e - \vartheta_{2e}} = \exp \left\{ - \left[k_2 \, . \, U_2 \, . \, x \left(\frac{1}{W_2} + \frac{1}{W} \right) + \frac{k_1 \, . \, U_1}{W} \, . \, \psi_{(x)\mathrm{III},\,2} \right] \right\} \tag{33}$$

Die ausgetauschten Wärmemengen ergeben sich zu

$$Q_1 = \frac{k_1 \, . \, F_1 (\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e})}{-\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}} + \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} + \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} \psi_{\mathrm{III},\,1}} \tag{34}$$

$$Q_2 = \frac{k_2 \, . \, F_2 (\vartheta_{2a} - \vartheta_{2e})}{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2e}}{\vartheta_a - \vartheta_{2a}} - \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} - \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} \psi_{\mathrm{III},\,2}} \tag{35}$$

Die Gleichungen für die Austauschflächen werden

$$F_1 = \frac{-\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}} + \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{III},\,1}}{k_1 \left(\dfrac{1}{W_1} - \dfrac{1}{W} \right)} \tag{36}$$

$$F_2 = \frac{\ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2e}}{\vartheta_a - \vartheta_{2a}} - \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{III},\,2}}{k_2\left(\dfrac{1}{W_2} + \dfrac{1}{W}\right)} \tag{37}$$

Daraus ist

$$F_1 = \frac{\ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1a}}{\vartheta_a - \vartheta_{1e}} - \dfrac{\psi_{\mathrm{III},\,1}}{W\left(\dfrac{1}{W_2} - \dfrac{1}{W}\right)} \, . \, \ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2e}}{\vartheta_a - \vartheta_{2a}}}{k_1\left[\dfrac{1}{W} - \dfrac{1}{W_1} - \dfrac{\psi_{\mathrm{III},\,1} \, . \, \psi_{\mathrm{III},\,2}}{W^2\left(\dfrac{1}{W_2} + \dfrac{1}{W}\right)}\right]} \tag{38}$$

Will man die Austauschfläche F_2 berechnen, ohne dass die Gleichung die Fläche F_1 enthält, so steht dafür Gl. (37) zur Verfügung in derselben Weise wie oben beim Gegen-Gegenstrom-Wärmeaustauscher gezeigt.

(d) *Gleich-Gegenstrom-Wärmeaustauscher*

Strömt der zu erwärmende heissere Stoff im Gleichstrom, dagegen der kältere im Gegenstrom zu dem wärmeabgebenden, so ergeben sich für den dann vorliegenden Dreistoff-Wärmeaustauscher folgende zu trennende Diffgln.

$$\mathrm{d}Q = -W \, . \, \mathrm{d}\vartheta\left[\frac{1}{1 + \dfrac{k_2 \, . \, U_2}{k_1 \, . \, U_1}\varphi(x)_2} + \frac{1}{1 + \dfrac{k_1 \, . \, U_1}{k_2 \, . \, U_2}\varphi(x)_1}\right] \tag{21}$$

$$\mathrm{d}Q = W_1 \, . \, \mathrm{d}\vartheta_1 - W_2 \, . \, \mathrm{d}\vartheta_2 \tag{39}$$

dazu wie schon oben die Gl. (3).

Die Gln. für den jeweiligen Temperaturverlauf lauten dann

$$\frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_e - \vartheta_{1e}} = \exp\left\{-\left[k_1 \, . \, U_1 \, . \, x\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W}\right) + \frac{k_2 \, . \, U_2}{W}\,\psi(x)_{\mathrm{IV},\,1}\right]\right\} \tag{40}$$

und

$$\frac{\vartheta - \vartheta_2}{\vartheta_e - \vartheta_{2a}} = \exp\left[k_2 \, . \, U_2 \, . \, x\left(\frac{1}{W_2} - \frac{1}{W}\right) - \frac{k_1 \, . \, U_1}{W} \, . \, \varphi(x)_{\mathrm{IV},\,2}\right] \tag{41}$$

Leitet man daraus die Gln. für die ausgetauschten Wärmemengen ab, so erhält man

$$Q_1 = \frac{k_1 \, . \, F_1(\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e})}{\ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}} - \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} - \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{IV},\,1}} \tag{42}$$

$$Q_2 = \frac{k_2 \, . \, F_2(\vartheta_{2a} - \vartheta_{2e})}{-\ln\dfrac{\vartheta_l - \vartheta_{2a}}{\vartheta_a - \vartheta_{2e}} + \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} + \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} . \, \psi_{\mathrm{IV},\,2}} \tag{43}$$

Die Gleichungen für die erforderlichen Austauschflächen ergeben sich dann zu

$$F_1 = \frac{\ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}} - \dfrac{k_2 \, . \, F_2}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{IV},\,1}}{k_1\left(\dfrac{1}{W_1} + \dfrac{1}{W}\right)} \tag{44}$$

$$F_2 = \frac{-\ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2a}}{\vartheta_a - \vartheta_{2e}} + \dfrac{k_1 \, . \, F_1}{W} \, . \, \psi_{\mathrm{IV},\,2}}{k_2\left(\dfrac{1}{W_2} - \dfrac{1}{W}\right)} \tag{45}$$

Nur als Gleichungen der Temperaturen und Stoffwerte geschrieben wird ihre Form

$$F_1 = \frac{\ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}} + \dfrac{\psi_{\mathrm{IV},\,1}}{W\left(\dfrac{1}{W_2} - \dfrac{1}{W}\right)} \, . \, \ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2a}}{\vartheta_a - \vartheta_{2e}}}{k_1\left[\dfrac{1}{W} + \dfrac{1}{W_1} + \dfrac{\psi_{\mathrm{IV},\,1} \, . \, \psi_{\mathrm{IV},\,2}}{W^2\left(\dfrac{1}{W_2} - \dfrac{1}{W}\right)}\right]} \tag{46}$$

$$F_2 = \frac{\ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2a}}{\vartheta_a - \vartheta_{2e}} + \dfrac{\psi_{\mathrm{IV},\,2}}{W\left(\dfrac{1}{W_1} + \dfrac{1}{W}\right)} \, . \, \ln\dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}}}{k_2\left[\dfrac{1}{W_2} - \dfrac{1}{W} - \dfrac{\psi_{\mathrm{IV},\,1} \, . \, \psi_{\mathrm{IV},\,2}}{W^2\left(\dfrac{1}{W_1} + \dfrac{1}{W}\right)}\right]} \tag{47}$$

(e) *Gleich-Gleichstrom-Wärmeaustauscher*

Ergibt sich durch die Auslegung des Dreistoff-Wärmeaustauschers, dass alle drei Medien in gleicher Richtung strömen, so nehmen beide

Temperaturen der wärmeaufnehmenden Stoffe mit wachsendem x zu, und es lauten dann die für das vorhandene Gleich-Gleichstrom-Prinzip erforderlichen Diffgln. wie Gl. (21) und (3), sowie

$$dQ = W_1 \,.\, d\vartheta_1 + W_2 \,.\, d\vartheta_2 \tag{48}$$

Daraus ergeben sich für die Temperaturverläufe zwischen den Anfangs- und Endtemperaturen folgende Gln.

$$\frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_e - \vartheta_{1e}} = \exp\left[- k_1 \,.\, U_1 \,.\, x \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W}\right) + \frac{k_2 \,.\, F_2}{W} \psi_{(x)\mathrm{V},\,1}\right] \tag{49}$$

und

$$\frac{\vartheta - \vartheta_2}{\vartheta_e - \vartheta_{2e}} = \exp\left[- k_2 \,.\, U_2 \,.\, x \left(\frac{1}{W_2} + \frac{1}{W}\right) + \frac{k_1 \,.\, F_1}{W} \psi_{(x)\mathrm{V},\,2}\right] \tag{50}$$

Für die Bestimmung der Austauschflächen gilt dann für die zwischen den Medien ausgetauschten Wärmemengen

$$Q_1 = \frac{k_1 \,.\, F_1 (\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e})}{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}} - \dfrac{k_1 \,.\, F_1}{W} + \dfrac{k_2 \,.\, F_2}{W} \,.\, \psi_{\mathrm{V},\,1}} \tag{51}$$

$$Q_2 = \frac{k_2 \,.\, F_2 (\vartheta_{2a} - \vartheta_{2e})}{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2e}}{\vartheta_a - \vartheta_{2a}} - \dfrac{k_2 \,.\, F_2}{W} + \dfrac{k_1 \,.\, F_1}{W} \,.\, \psi_{\mathrm{V},\,2}} \tag{52}$$

Die Gleichungen für die zu dieser Wärmeabgabe erforderlichen Austauschflächen haben dann für das Gleich-Gleichstrom-Prinzip die folgende Form

$$F_1 = \frac{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}} + \dfrac{\psi_{\mathrm{V},\,1}}{W\left(\dfrac{1}{W_2} + \dfrac{1}{W}\right)} \ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2e}}{\vartheta_a - \vartheta_{2a}}}{k_1 \left[\dfrac{1}{W} + \dfrac{1}{W_1} + \dfrac{\psi_{\mathrm{V},\,1} \,.\, \psi_{\mathrm{V},\,2}}{W^2 \left(\dfrac{1}{W_2} + \dfrac{1}{W}\right)}\right]} \tag{53}$$

$$F_2 = \frac{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{2e}}{\vartheta_a - \vartheta_{2a}} + \dfrac{\psi_{\mathrm{V},\,2}}{W\left(\dfrac{1}{W_1} + \dfrac{1}{W}\right)} \ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}}}{k_2 \left[\dfrac{1}{W} + \dfrac{1}{W_2} + \dfrac{\psi_{\mathrm{V},\,1} \,.\, \psi_{\mathrm{V},\,2}}{W^2 \left(\dfrac{1}{W_1} + \dfrac{1}{W}\right)}\right]} \tag{54}$$

(f) *Gleichstrom-Wärmeaustauscher*

Bei einem Gleichstrom-Wärmeaustauscher liegt, wie schon oben erwähnt und in Abb. 6 dargestellt, infolge der praktischen Isolation oder eines Fehlens derselben durch den Wärmeverlust an die Umgebung ein Dreistoff-Wärmeaustauscher vor. Für die Berechnung sind in einem solchen Falle die Verlustwärme bzw. der Verlustfaktor Ω (Prozent) und die durch den Verlust ansteigende Austauschflächengrösse wichtig.

In diesem Falle lauten die Diffgln. des Problems

$$dQ_1 = - W \frac{dQ_1}{dQ} \,.\, d\vartheta \tag{8}$$

$$dQ_1 = W_1 \,.\, d\vartheta_1 \tag{55}$$

$$dQ_1 = k_1 \,.\, U_1 \,.\, dx\, (\vartheta - \vartheta_1) \tag{10}$$

Damit wird der Temperaturverlauf

$$\vartheta - \vartheta_1 = (\vartheta_e - \vartheta_{1e}) \times \exp\left[- k_1 \,.\, U_1 \,.\, x \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W}\right) + \frac{k_2 \,.\, U_2}{W} \,.\, \psi_{(x)\mathrm{VI},\,1}\right] \tag{56}$$

Für die Austauschwärme ergibt sich die Gleichung

$$Q_1 = \frac{k_1 \,.\, F_1 (\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e})}{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}} - \dfrac{k_1 \,.\, F_1}{W} - \dfrac{k_2 \,.\, F_2}{W} \,.\, \psi_{\mathrm{VI},\,1}} \tag{57}$$

Der Wärmeverlust des Austauschers wird wie beim Gegenstrom-Wärmeaustauscher mit den Gleichungen (14) und (15) berechnet. Mit dem Temperaturverlauf nach Gl. (56) erhält man für die Verlustwärme folgende Gleichung

$$Q_2 = \frac{k_2 \,.\, F_2 (\vartheta_e - \vartheta_a)}{\dfrac{k_2 \,.\, F_2}{W} + \dfrac{k_1 \,.\, F_1}{W} \,.\, \psi_{\mathrm{VI},\,2}} \tag{58}$$

Schreibt man diese Gleichung mit dem Verlustfaktor, so lautet sie

$$Q_2 = \Omega \,.\, W(\vartheta_e - \vartheta_a) = \Omega \,.\, Q \tag{59}$$

wobei der Verlustfaktor beträgt

$$\Omega = \frac{1}{1 + \dfrac{k_1 \,.\, F_1}{k_2 \,.\, F_2} \psi_{\mathrm{VI},\,2}} \tag{60}$$

Die Gln. der Austauschflächen lauten dann beim Gegenstrom-Wärmeaustauscher

$$F_1 = \frac{\ln \dfrac{\vartheta_e - \vartheta_{1e}}{\vartheta_a - \vartheta_{1a}}}{\dfrac{k_1}{W_1} + \dfrac{k_1}{W}\left(1 + \dfrac{\psi_{\mathrm{VI},\,1} \,.\, \psi_{\mathrm{VI},\,2}}{(Q/Q_2 - 1)}\right)} \tag{61}$$

und

$$F_2 = F_1 \,.\, \frac{k_1}{k_2} \,.\, \frac{\psi_{\mathrm{VI},\,2}}{(Q/Q_2 - 1)} \tag{62}$$

DISKUSSION

In der Abhandlung wurde gezeigt, dass man es bei der Berechnung von Dreistoff-Wärmeaustauschern und der Wärmeabgabe durch ein Medium mit einer gegenseitigen Abhängigkeit der Temperaturen zu tun hat. Man sieht, dass 6 Wärmeaustauscher-Typen vorhanden sind, wobei als Grenztypen der Gleich- sowie Gegenstrom-Wärmeaustauscher unter Berücksichtigung des Wärmeverlustes einbezogen sind. Für die Separation der zu lösenden Diffgln. im Sinne der Bestimmung der Einzelaustauschflächen wurde das Wärmeverhältnis auf dem Austauschwege durch die Ein- und Austritts-Temperaturen der Medien ausgedrückt. Die Glchn. für Austauschwärmemenge und—flächen erhalten hierbei die gleiche Form wie bei den Zweistoff-Wärmeaustauschern. Die Abhängigkeit der einzelnen Temperaturverläufe und der Austauschwärmen voneinander erscheint in diesen Glchn. in Form eines Summengliedes, in welchem die vorhandene Wärmeabgabe an das andere Medium berücksichtigt wird. Der dort auftretende Faktor ist mit Hilfe einer Tabelle für die verschiedenen Arten der Dreistoff-Wärmeaustauscher zu bestimmen.

LITERATUR

1. T. B. MORLEY, Exchange of heat between three fluids, *Engineer*, **155**, 314 (1933).
2. H. HAUSEN, *Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom*. Springer Verlag, Berlin (1950).
3. K. NESSELMANN, Der Einfluss der Wärmeverluste auf Doppelrohrwärmeaustauscher, *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* **6**, 174–183 (1928).

Abstract—A possibility is provided to calculate the interdependent heat-exchange areas of a three-mass heat-exchanger, i.e. a heat-exchanger which allows the simultaneous heating of two media by one hot medium. It is done by separation of the six necessary differential equations and formulation of a coefficient for the temperature ratio. This ratio assumes approximate linearity. The equations found are of the same configuration as the ones for two-mass heat-exchangers, with an additional term to consider the interdependence of the media.

Résumé—Cet article donne un procédé de calcul des surfaces d'échange pour un échangeur de chaleur à trois masses, c'est-à-dire un échangeur de chaleur qui permet le chauffage simultané de deux milieux par un troisième milieu chaud. Ce calcul se fait à partir de six équations différentielles et d'une formule établie à partir du rapport des températures. Ce rapport est supposé approximativement linéaire. Les équations trouvées sont de la même forme que les équations relatives aux échangeurs de chaleur à deux masses, elles possèdent un terme supplémentaire qui tient compte de l'interdépendance des milieux.

Аннотация—Дан метод расчёта взаимозависимых поверхностей нагрева тепло-и массообменника с тремя теплоносителями, в котором одной (горячей) средой нагреваются одновременно две другие (раздельно текущие). Составлено шесть дифференциальных уравнений и введён линейный коэффициент распределения температуры в качестве приближения. Выведенные уравнения по форме аналогичны уравнениям для теплообменников с двумя теплоносителями, но имеют дополнительный член, учитывающий взаимозависимость теплообмена трёх сред.